BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2026

MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE DU MARDI 8 SEPTEMBRE 2026

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1/8 à 8/8.

Le candidat doit traiter les quatre exercices proposés.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

Exercice 1 (5 points)

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.
Les parties **A**, **B** et **C** sont indépendantes les unes des autres et peuvent donc être traitées séparément.

Partie A

On s'intéresse au respect des délais de livraison de colis à domicile dans une agglomération. Une étude a permis d'établir que :

- lorsque le livreur est expérimenté, le délai de livraison est respecté pour 95 % des colis ;
- lorsque le livreur est débutant, le délai de livraison est respecté pour 75 % des colis.

Dans une entreprise qui emploie ses propres livreurs parmi lesquels 60 % sont expérimentés et les autres sont débutants, on s'intéresse à une livraison choisie au hasard.
On note :

- E l'événement : « la livraison est effectuée par un livreur expérimenté » ;
- R l'événement : « le délai de livraison est respecté ».

1. Calculer $P(E \cap R)$. On pourra s'appuyer sur un arbre de probabilité.
2. Justifier que $P(R) = 0{,}87$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Sachant qu'un colis a été livré en respectant les délais de livraison, quelle est la probabilité qu'il ait été livré par un livreur expérimenté ?

Partie B

Dans le but d'améliorer le service livraison, l'entreprise analyse un échantillon de 200 livraisons prises au hasard parmi celles effectuées par un livreur expérimenté sur une période donnée. On rappelle que la probabilité qu'un livreur expérimenté respecte les délais de livraison est $95\ \%$.
On suppose que le nombre de colis est assez important pour que l'on puisse assimiler le choix de cet échantillon à des tirages successifs avec remise.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de colis livrés en respectant les délais de livraison parmi les 200 livraisons de cet échantillon.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. L'événement « tous les colis ont été livrés en respectant les délais de livraison » est-il un événement impossible ? Justifier.
3. Donner $P(X \geq 190)$ puis interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

Deux zones géographiques sont desservies sans que les livraisons dans l'une n'aient d'incidence sur celles dans l'autre :

- en zone A, les délais de livraison sont respectés dans $85\ \%$ des cas ;
- en zone B, les délais de livraison sont respectés dans $90\ \%$ des cas.

L'entreprise observe 120 livraisons effectuées en zone A et 80 livraisons effectuées en zone B.
On note :

- X_A la variable aléatoire comptabilisant le nombre de colis livrés respectant les délais de livraison en zone A ;
- X_B la variable aléatoire comptabilisant le nombre de colis livrés respectant les délais de livraison en zone B ;
- $S = X_A + X_B$ la variable aléatoire donnant le nombre total de colis livrés respectant les délais de livraison.

On admet que X_A suit une loi binomiale $\mathcal{B}(120\ ;\ 0{,}85)$ et que X_B suit une loi binomiale $\mathcal{B}(80\ ;\ 0{,}90)$.

1. Calculer l'espérance et la variance des variables X_A et X_B.
2. Calculer $E(S)$.
3. Quelle condition permet d'affirmer que $V(S) = 22{,}5$?
4. À l'aide d'une inégalité de Bienaymé-Tchebychev, minorer $P(S \in [165\,;\,183])$ et interpréter le résultat.

Exercice 2 (5 points)

Partie A

Soit f la fonction définie sur $]-3\,;\,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{2x}{x+3}$.

On admet que f est dérivable sur $]-3\,;\,+\infty[$.

1. Vérifier, en détaillant les calculs, que pour tout réel x de $]-3\,;\,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{6}{(x+3)^2}$

   En déduire que f est croissante sur $]-3\,;\,+\infty[$.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1}=f(u_n)$.

2. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier n, on a : $0\leq u_{n+1}\leq u_n\leq 1$.
3. En déduire que (u_n) est convergente.

Partie B

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n\neq 0$.

On note (v_n) et (w_n) les suites définies pour tout entier naturel n par :

$$v_n=\frac{1}{u_n} \quad \text{et} \quad w_n=v_n+1$$

1. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1}=\frac{3}{2}v_n+\frac{1}{2}$.
2. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera les paramètres.
3. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$u_n=\frac{1}{2\left(\frac{3}{2}\right)^n-1}$$

4. Déterminer la limite de la suite (u_n).
5. **a.** Recopier et compléter le script suivant de telle sorte que la fonction **seuil**() renvoie le plus petit entier n tel que u_n soit inférieur ou égal à 10^{-3}.

```
def seuil():
    n = 0
    u = 1
    while ... :
        n = n + 1
        u = ...
    return ...
```

   b. Quelle est la valeur renvoyée par la fonction **seuil**() ?

Exercice 3 (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Les affirmations sont indépendantes.

Pour toutes les questions, l'espace est muni d'un repère orthonormé.

1. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ trois vecteurs de l'espace.

Affirmation 1 : Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment une base de l'espace.

2. Soit quatre points de l'espace :

$$\mathrm{A}(1\,;\,2\,;\,3),\quad \mathrm{B}(2\,;\,0\,;\,1),\quad \mathrm{C}(0\,;\,1\,;\,2),\quad \mathrm{D}(0\,;\,4\,;\,-1)$$

On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Affirmation 2 : La droite (CD) est orthogonale au plan (ABC).

3. Soit d une droite de l'espace dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -2 + 4t \\ z = -2 + t \end{cases} \quad \text{avec} \quad t \in \mathbf{R}$$

Soit P_1 le plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et passant par $\mathrm{E}(1\,;\,1\,;\,-1)$.

Affirmation 3 : L'intersection de la droite d et du plan P_1 est le point $\mathrm{M}(2\,;\,2\,;\,-1)$.

4. Soit $\mathrm{N}(2\,;\,0\,;\,-2)$ et $\mathrm{H}(1\,;\,-2\,;\,0)$ deux points de l'espace.

Soit P_2 le plan d'équation cartésienne $x + 2y - 2z + 3 = 0$.

Affirmation 4 : La distance de N au plan P_2 est NH.

Exercice 4 (6 points)

On peut traiter indépendamment les parties **A** et **B**.

Partie A

On considère l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}) : 2y' + 3y = 8\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t}$$

où y est une fonction de la variable t et elle est définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.

1. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ l'équation différentielle $(\mathrm{E}') : 2y' + 3y = 0$.
2. Soit f la fonction dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, définie par $f(t) = 4t\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t}$.
   On admet que cette fonction f est une solution de l'équation différentielle (E).
   On considère une fonction g définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.
   Démontrer que :
   « g est solution de (E) » est équivalent à « $g - f$ solution de (E') ».
3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer toutes les solutions de (E) qui s'annulent en 0.

Partie B

Un essai clinique est réalisé auprès de plusieurs patients volontaires afin de valider ou non l'efficacité d'un médicament. On demande au patient d'avaler le médicament sous la forme d'un comprimé de 1 mg puis on étudie la quantité de ce médicament présente dans le sang au cours du temps.

La quantité de ce médicament en fonction du temps écoulé après la prise du comprimé, en mg, est modélisée par la fonction f dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, définie par :

$f(t) = 4t\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t}$, t étant exprimé en heures.

1. Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
2. **a.** Vérifier en détaillant les calculs que pour tout réel t positif,
   $$f'(t) = (4 - 6t)\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t}$$
   b. Étudier le signe de la dérivée et en déduire le tableau de variations de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.
   c. Au bout de combien de temps la quantité de ce médicament présente dans le sang est-elle maximale ?

3. Démontrer que l'équation $f(t) = 0{,}5$ admet une unique solution sur $[1\ ;\ 3]$. Donner un encadrement de cette solution, notée α, à 10^{-2} près.

4. L'essai clinique sera validé si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- Condition 1 : $50\ \%$ de la quantité du médicament est éliminée de l'organisme au plus tard 2 heures après la prise du comprimé.
- Condition 2 : la quantité moyenne du médicament présente dans le corps du patient entre 1 heure et 3 heures après la prise du comprimé est inférieure à $0{,}40$ mg.

La condition 1 est-elle réalisée ?

La condition 2 est-elle réalisée ?