BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2022

MATHÉMATIQUES

JOUR 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Le sujet propose 4 exercices

Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 exercices et **ne doit traiter que ces 3 exercices**

Chaque exercice est noté sur **7 points (le total sera ramené sur 20 points).**
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

EXERCICE 1 (7 points) [probabilités]

Une entreprise fabrique des composants pour l'industrie automobile. Ces composants sont conçus sur trois chaînes de montage numérotées de 1 à 3.

- La moitié des composants est conçue sur la chaîne n°1 ;
- 30 % des composants sont conçus sur la chaîne n°2 ;
- les composants restant sont conçus sur la chaîne n°3.

À l'issue du processus de fabrication, il apparaît que 1 % des pièces issues de la chaîne n°1 présentent un défaut, de même que 0,5 % des pièces issues de la chaîne n°2 et 4 % des pièces issues de la chaîne n°3.

On prélève au hasard un de ces composants. On note :

- C_1 l'événement « le composant provient de la chaîne n°1 » ;
- C_2 l'événement « le composant provient de la chaîne n°2 » ;
- C_3 l'événement « le composant provient de la chaîne n°3 » ;
- D l'événement « le composant est défectueux » et $\overline{D}$ son événement contraire.

Dans tout l'exercice, les calculs de probabilité seront donnés en valeur décimale exacte ou arrondie à 10^{-4} *si nécessaire.*

PARTIE A

1. Représenter cette situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que le composant prélevé provienne de la chaîne n°3 et soit défectueux.
3. Montrer que la probabilité de l'événement D est $P(D) = 0,0145$.
4. Calculer la probabilité qu'un composant défectueux provienne de la chaîne n°3.

PARTIE B

L'entreprise décide de conditionner les composants produits en constituant des lots de n unités. On note X la variable aléatoire qui, à chaque lot de n unités, associe le nombre de composants défectueux de ce lot. Compte tenu des modes de production et de conditionnement de l'entreprise, on peut considérer que X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,0145$.

1. Dans cette question, les lots possèdent 20 unités. On pose $n = 20$.
   a. Calculer la probabilité pour qu'un lot possède exactement trois composants défectueux.
   b. Calculer la probabilité pour qu'un lot ne possède aucun composant défectueux.
   En déduire la probabilité qu'un lot possède au moins un composant défectueux.

2. Le directeur de l'entreprise souhaite que la probabilité de n'avoir aucun composant défectueux dans un lot de n composants soit supérieure à 0,85. Il propose de former des lots de 11 composants au maximum. A-t-il raison ? Justifier la réponse.

PARTIE C

Les coûts de fabrication des composants de cette entreprise sont de 15 euros s'ils proviennent de la chaîne de montage n°1, 12 euros s'ils proviennent de la chaîne de montage n°2 et 9 euros s'ils proviennent de la chaîne de montage n°3.

Calculer le coût moyen de fabrication d'un composant pour cette entreprise.

EXERCICE 2 (7 points) [Fonctions, fonction logarithme]

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f, définie sur $]0;+\infty[$, par :
$f(x) = 3x - x\ln(x) - 2\ln(x)$.

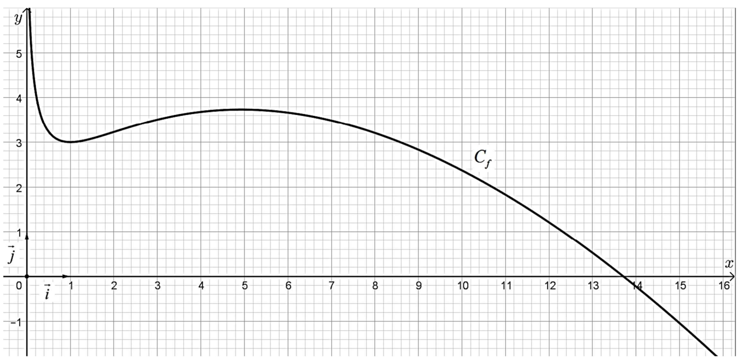
PARTIE A : Étude d'une fonction auxiliaire *g*

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = 2(x-1) - x\ln(x)$. On note g' la fonction dérivée de g. On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

1. Calculer $g(1)$ et $g(\mathrm{e})$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ en justifiant votre démarche.
3. Montrer que, pour tout $x > 0$, $g'(x) = 1 - \ln(x)$. En déduire le tableau des variations de g sur $]0;+\infty[$.
4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions distinctes sur $]0;+\infty[$: 1 et α avec α appartenant à l'intervalle $[\mathrm{e};+\infty[$. On donnera un encadrement de α à 0,01 près.
5. En déduire le tableau de signes de g sur $]0;+\infty[$.

PARTIE B : Étude de la fonction *f*

On considère dans cette partie la fonction f, définie sur $]0;+\infty[$, par
$f(x) = 3x - x\ln(x) - 2\ln(x)$. On note f' la fonction dérivée de f.
La représentation graphique C_f de cette fonction f est donnée dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ ci-dessous. On admet que : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.



1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ en justifiant votre démarche.
2. **a.** Justifier que pour tout $x>0$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$.

   b. En déduire le tableau des variations de f sur $]0;+\infty[$.

3. On admet que, pour tout $x>0$, la dérivée seconde de f, notée f'', est définie par $f''(x)=\dfrac{2-x}{x^2}$. Étudier la convexité de f et préciser les coordonnées du point d'inflexion de C_f.

EXERCICE 3 (7 points) [Suites]

La population d'une espèce en voie de disparition est surveillée de près dans une réserve naturelle.
Les conditions climatiques ainsi que le braconnage font que cette population diminue de 10 % chaque année.
Afin de compenser ces pertes, on réintroduit dans la réserve 100 individus à la fin de chaque année.
On souhaite étudier l'évolution de l'effectif de cette population au cours du temps. Pour cela, on modélise l'effectif de la population de l'espèce par la suite (u_n) où u_n représente l'effectif de la population au début de l'année $2020+n$.
On admet que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$.

Au début de l'année 2020, la population étudiée compte 2 000 individus, ainsi $u_0=2000$.

1. Justifier que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence :
$$u_{n+1}=0{,}9u_n+100.$$
2. Calculer u_1, puis u_2.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $1000<u_{n+1}\leq u_n$.
4. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.
5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n=u_n-1000$.

   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $0{,}9$.

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n=1000\left(1+0{,}9^n\right)$.

   c. Déterminer la limite de la suite (u_n). En donner une interprétation dans le contexte de cet exercice.

6. On souhaite déterminer le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous d'un certain seuil S (avec $S>1000$).

   a. Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n\leq 1020$.
   Justifier la réponse par un calcul.

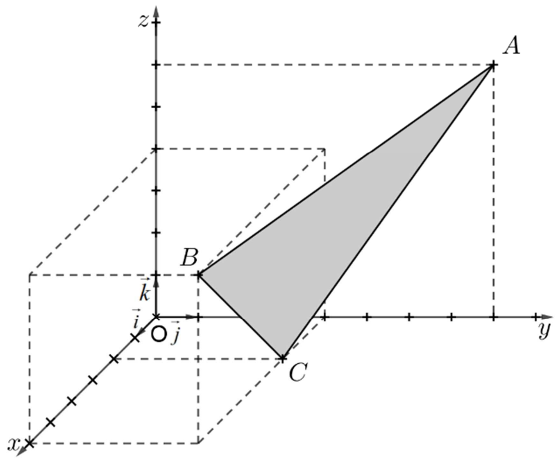
b. Dans le programme Python ci-contre, la variable n désigne le nombre d'années écoulées depuis 2020, la variable u désigne l'effectif de la population.
Recopier et compléter ce programme afin qu'il retourne le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous du seuil S.

```
def population(S):
    n=0
    u=2000

    while ..........:
        u=...
        n=...
    return ...
```

EXERCICE 4 (7 points) [Géométrie dans l'espace]

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points $A(0;\,8;\,6)$, $B(6;\,4;\,4)$ et $C(2;\,4;\,0)$.



1. a. Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. Montrer que le vecteur $\vec{n}(1;\,2;-1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

2. Soient D et E les points de coordonnées respectives $(0;0;6)$ et $(6;6;0)$.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DE).

b. Montrer que le milieu I du segment $[BC]$ appartient à la droite (DE).

3. On considère le triangle ABC.

a. Déterminer la nature du triangle ABC.

b. Calculer l'aire du triangle ABC en unité d'aire.

c. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

d. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie à 0,1 degré.

4. On considère le point H de coordonnées $\left(\frac{5}{3};\frac{10}{3};-\frac{5}{3}\right)$.

Montrer que H est le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

En déduire la distance du point O au plan (ABC).